Ueber eine

in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe.

Inauguraldissertation,

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Rigakuschi Rikitaro Fudzisawa

aus Niigata (Japan).

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Strassburg,

Buchdruckerei von R. Schultz und Comp.

1886.

Herrn Prof. Dr. E. B. CHRISTOFFEL

in Dankbarkeit

gewidmet.

Herrn Prof. Dr. E. B. CHRISTOFFEL

in Dankbarkeit

gewidmet.

Ueber eine

in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe.

Die vorliegende Arbeit bringt die folgende Aufgabe zum Abschluss.

In seiner „Théorie analyt. de la chaleur" behandelt FOURIER die Aufgabe: Die Temperatur im Innern einer festen homogenen Kugel vom Radius l hängt zur Zeit $t = 0$ nur von dem Abstand r vom Centrum der Kugel ab und ist gegeben; sie möge mit $f(r)$ bezeichnet werden. Gesucht ist die Temperatur u zur späteren Zeit t unter der Voraussetzung, dass an der Oberfläche stets die Bedingung

$$\frac{du}{dr} + hu = 0$$

erfüllt wird, wo h eine positive Constante bedeutet.

Als Lösung dieser Aufgabe findet FOURIER den Ausdruck

$$\text{(a)} \qquad u = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_0^l \varrho f(\varrho) \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right) d\varrho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\varrho}{l}\right)^2 d\varrho}$$

wo $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\lambda \cos \lambda + (\alpha - 1) \sin \lambda = 0$$

der Grösse nach geordnet sind; α ist die positive Constante hl.

Dass die Summe u dieser Reihe für ein positives t den Bedingungen der Aufgabe genügt, springt in die Augen; aber es fehlt der Nachweis, dass diese Lösung auch der Anfangsbedingung entspricht, eine Lücke, welche von FOURIER und POISSON[1] wohl bemerkt worden ist, ohne dass sie jedoch näher darauf eingegangen wären.

---

1. POISSON, Théorie math. de la chaleur, Paris 1835, pag. 171.

Dieser Nachweis wird im folgenden geführt werden.

Es ist nicht die erste Arbeit, welche sich mit dieser Frage beschäftigt.

Schon LIOUVILLE suchte diese Lücke in der Lösung FOURIER's auszufüllen, indem er sich vielfach mit der Frage nach der Darstellbarkeit willkürlich gegebener Funktionen durch Reihen, die ganz analog gebaut sind wie die für $t = 0$ formirte Reihe

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_0^l \varrho f(\varrho) \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right) d\varrho}{\int_0^l \left(\sin \lambda_n \frac{\varrho}{l}\right)^2 d\varrho},$$

beschäftigte. Er wollte zeigen, dass diese Reihe $r f(r)$ darstellt, aber sein Beweis leidet dadurch Mangel an Strenge, dass er die fragliche Reihe ohne Weiteres gliedweise integrirt[1], so dass das hierdurch erhaltene Resultat, wenn nicht unrichtig, doch jedenfalls unsicher ist.

In der zuletzt erschienenen und gemeinschaftlich mit STURM ausgeführten Untersuchung[2] über diesen Gegenstand geht LIOUVILLE von einer Partialbruchzerlegung aus. Es wird ein Bruch, dessen Zähler und Nenner transcendente Funktionen sind, wie die Verfasser sich ausdrücken, „par les méthodes connues pour ce genre de décomposition" in Partialbrüche zerlegt. Offenbar ist aber damit nicht etwa die Interpolationsformel von LAGRANGE, sondern die Methode, welche CAUCHY[3] schon im Jahre 1827 unter Anwendung der nach ihm genannten Residuenrechnung entwickelt hat, zu verstehen. In der That ist eine solche Zerlegung, wie HEINE[4] durch wirkliche Rechnung bewiesen hat, in gewissen speciellen Fällen zulässig. Da nun die weiter zu besprechende Methode von STURM und LIOUVILLE mit dieser nachträglichen Ergänzung, betreffend die darin vorkommende Partialbruchzerlegung, bei HEINE reproducirt und nach ihm von Herrn KNAKE[5] an einem speciellen Beispiele angewendet ist, so wird es erlaubt sein direct an die HEINE'sche Abhandlung anzuknüpfen.

Nach HEINE liefert die genannte Partialbruchzerlegung in den vier Fällen, welche er anführt, eine in gleichem Grade convergirende Reihe; diese Reihe findet sich auf Seite 37 der Abhandlung von HEINE unter (γ). Sie wird mit einem Faktor $(g f(\xi)\, d\xi)$ multiplicirt und zwischen Grenzen integrirt, wobei die als zulässig nachgewiesene gliedweise Integration zur Anwendung kommt. Aber in dem so erhaltenen

---

1. LIOUVILLE, Journal de mathém., tome I^{er} (1836), pag. 263.

2. LIOUVILLE, Journal de mathém., tome II (1837), pag. 220—223.

3. CAUCHY, Exercices math. (1827). Sur le développement des fonctions d'une seule variable en fractions rationnelles, Seite 277.

4. CRELLE, Journal für Math., Bd. 89, Seite 31—39.

5. RICHARD KNAKE, Ueber die lineare Wärmebewegung in einem von zwei parallelen Wänden begrenzten Körper. Inaugural-Dissertation, Halle 1879.

Resultate (Formel (δ)) wird eine hiervon durchaus verschiedene gliedweise Integration rückgängig gemacht, und unter der Voraussetzung, dass die unendliche Reihe ($F(\xi)$), welche nun unter dem Integralzeichen auftritt, ebenfalls in gleichem Grade convergire, für vier Fälle die Entwickelung (β) der Funktion $f(\xi)$ als richtig nachgewiesen. Ob aber in diesen Fällen die oben erwähnte Voraussetzung bezüglich der gleichmässigen Convergenz der Reihe $F(\xi)$ erfüllt ist, wird nicht untersucht.

Eine von den Vorangehenden ganz verschiedene Untersuchung von Herrn William Thomson[1] über die Reihe (*b*) nimmt die Möglichkeit der Entwickelung an und liefert gleichfalls einen strengen Nachweis nicht, dass diese Reihe wirklich $r f(r)$ darstellt.

Die folgende von Herrn Prof. Christoffel in einer Vorlesung kurz angedeutete Methode besteht darin, dass man einen zweiten Ausdruck

$$(c) \quad u' = \frac{2}{rl} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(n\pi \frac{a}{l}\right)^2 t} \sin\left(n\pi \frac{r}{l}\right) \int_0^l \varrho f(\varrho) \sin\left(n\pi \frac{\varrho}{l}\right) d\varrho$$

aufstellt, welcher die Lösung unserer Aufgabe liefert, wenn an der Oberfläche, statt

$$\frac{du}{dr} + hu = 0,$$

$u = 0$ gesetzt wird, und man sodann die Differenz $(u' - u)$ in ein bestimmtes Integral verwandelt und dieses Integral bei abnehmendem t untersucht.

Für die Wärmeleitungsaufgabe genügt es nachzuweisen, dass u mit abnehmendem t gegen die Grenze $f(r)$ convergirt. Wird dagegen $f(r)$ sogar durch die für $t = 0$ formirte Reihe dargestellt, so ist dies nach einem bekannten Satze über die Potenzreihen hierfür ausreichend aber nicht nothwendig. Aus der folgenden Rechnung geht hervor, dass die durch bestimmtes Integral ausgedrückte Differenz $(u' - u)$, über $f(r)$ die Dirichlet'schen Bedingungen vorausgesetzt, für $0 < r < l$ durch Verkleinerung von t unter jede Grenze sinkt.

Somit ist nachgewiesen, dass u mit abnehmendem t wirklich gegen $f(r)$ convergirt, weil dies von u' bekannt ist, und hierdurch, aber auch erst hierdurch kann die ursprüngliche Wärmeleitungsaufgabe als vollständig gelöst angesehen werden.

Zum Schluss dieser Einleitung mögen noch einige allgemeine Bemerkungen Platz finden. Bekanntlich ist die Frage der Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen durch Fourier'sche Reihen und durch die Reihen, die nach Kugelkfunktionen fortschreiten, von Dirichlet[2] unter den für die physikalische Anwendung hinreichend allgemeinen Voraussetzungen über die darzustellenden Funktionen in aller Strenge

---

1. Cambridge math. Journal. Vol. III. Cambridge 1841, unterzeichnet P. Q. R.
2. Dirichlet, Crelle Journal für Math., Bd. 4, Seite 17.

entschieden worden. Seine Methode, welche darin besteht, dass man die Summe einer endlichen Anzahl n von Gliedern der fraglichen Reihe durch ein bestimmtes Integral ausdrückt und dieses Integral bei wachsendem n untersucht, ist neuerdings auch von Herrn KOPPE[1] bei einer anderen Entwickelung mit Erfolg angewendet worden. Meine Arbeit geht einen ganz andern Weg, indem sie einen complicirten Fall auf den einfacheren zurückführt, welcher durch die Theoreme DIRICHLET's erledigt ist. Im Uebrigen lässt sich die von mir angewandte Methode auch auf die für $t = 0$ gebildete Reihe (b) anwenden, was ich bei einer andern Gelegenheit auszuführen gedenke.

---

§ 1.

Wir gehen also aus von den beiden unendlichen Reihen

$$\text{I.} \qquad ru' = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(n\pi \frac{a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(n\pi \frac{r}{l}\right) \int_o^l \varrho\, f(\varrho) \sin\left(n\pi \frac{\varrho}{l}\right) d\varrho$$

und

$$\text{II.} \qquad ru = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \frac{\int_o^l \varrho\, f(\varrho) \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right) d\varrho}{1 - \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n}},$$

wo in der letzteren für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\text{III.} \qquad \varphi(\lambda) = \lambda \cos \lambda + (\alpha - 1) \sin \lambda = 0,$$

und zwar der Grösse nach geordnet einzusetzen sind, und im Nenner des allgemeinen Gliedes die Formel

$$\int_o^l \left(\sin \lambda \frac{r}{l}\right)^2 dr = \frac{l}{2}\left[1 - \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\lambda}\right]$$

benützt ist[2].

Setzt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(n\pi \frac{a}{l}\right)^2 t} \sin\left(n\pi \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{\varrho}{l}\right) = \mathfrak{L}(\varrho \mid r \mid t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t} \frac{\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right)}{1 - \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n}} = \mathfrak{M}(\varrho \mid r \mid t),$$

---

1. ANDREAS SCHULE, Wissenschaftliche Abhandlung. Berlin 1877.
2. FOURIER, l. c., chap. V, art. 291.

so hat man mit Rücksicht auf die ununterbrochene (gleichmässige) Convergenz dieser Reihen auch

$$u' = \frac{2}{r \cdot l} \int_0^l \varrho\, f(\varrho)\, \mathfrak{L}(\varrho \mid r \mid t)\, d\varrho$$

$$u = \frac{2}{r \cdot l} \int_0^l \varrho\, f(\varrho)\, \mathfrak{M}(\varrho \mid r \mid t)\, d\varrho.$$

§ 2.

Dies vorangeschickt, lässt sich eine einwerthige Funktion einer complexen Variabeln z nachweisen, deren Residuen die einzelnen Glieder der Ausdrücke $\mathfrak{L}$ und $-\mathfrak{M}$ sind, so dass die Differenz

IV. $$\mathfrak{D} = \mathfrak{L} - \mathfrak{M}$$

sich als die Summe der Residuen dieser Funktion darstellt, und dann wird

V. $$u' - u = \frac{2}{r \cdot l} \int_0^l \varrho\, f(\varrho)\, \mathfrak{D}\, d\varrho.$$

Zu diesem Zwecke ist zunächst eine Umformung im Ausdrucke von $\mathfrak{M}$ erforderlich. Sei

$$\varphi(z) = z \cos z + (\alpha - 1) \sin z,$$
$$\psi(z) = \sin z\, \varphi(z);$$

die Nullpunkte dieser Funktion $\psi(z)$ sind einerseits die Wurzeln der Gleichung $\sin z = 0$, also von der Ausdrucksform $z = n\pi$, anderseits die Wurzeln $z = \lambda_n$ der Gleichung $\varphi(z) = 0$.

Zunächst haben wir die Derivirten

$$\psi'(z) = \sin z\, \varphi'(z) + \cos z\, \varphi(z),$$
$$\varphi'(z) = \alpha \cos z - z \sin z.$$

Ist z eine Wurzel λ der Gleichung $\varphi(z) = 0$, so ist

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= \sin \lambda\, \varphi'(\lambda) = \cos \lambda \cdot \alpha \sin \lambda - \lambda \sin^2 \lambda \\ &= \cos \lambda\, [\sin \lambda - \lambda \cos \lambda] - \lambda \sin^2 \lambda \\ &= \sin \lambda \cos \lambda - \lambda. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\mathfrak{M}(\varrho \mid r \mid t) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t}\, \frac{\lambda_n \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right)}{\psi'(\lambda_n)}.$$

Anderseits wird für $z = n\pi$,

$$\psi'(z) = \cos n\pi \; \varphi(n\pi)$$
$$= n\pi,$$

d. i.
$$1 = \frac{n\pi}{\psi'(n\pi)}.$$

Wir haben also auch

$$\mathfrak{L}(\rho \mid r \mid t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(n\pi \frac{a}{l}\right)^2 t} \frac{n\pi \cdot \sin\left(n\pi \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{\rho}{l}\right)}{\psi'(n\pi)}.$$

Setzen wir daher

$$w(z) = e^{-\left(z \frac{a}{l}\right)^2 t} \frac{z \cdot \sin\left(z \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(z \frac{\rho}{l}\right)}{\psi(z)}$$

und bezeichnen dann $R(n\pi)$, $R(\lambda_n)$ ihre Residuen für $z = n\pi$, $z = \lambda_n$, so haben wir

$$\mathfrak{L}(\rho \mid r \mid t) = \sum_{n=1}^{\infty} R(n\pi)$$

$$-\mathfrak{M}(\rho \mid r \mid t) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\lambda_n),$$

und es handelt sich nun darum, die Differenz

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{L}(\rho \mid r \mid t) - \mathfrak{M}(\rho \mid r \mid t)$$

durch ein bestimmtes Integral auszudrücken.

§ 3.

Im Vorangehenden kommen nur die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\psi(z) = \sin z \; \varphi(z) = 0$$

in Betracht. Für die Rechnung ist est zweckmässig, auch die negativen Wurzeln mit zu berücksichtigen; $z = 0$ gibt kein Residuum.

Die Funktion w hat in den Punkten $n\pi$ und $-n\pi$ das nämliche Residuum:

$$R(n\pi) = R(-n\pi) = e^{-\left(n\pi \frac{a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(n\pi \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{\rho}{l}\right).$$

Die transcendente Gleichung

$$\varphi(z) = z \cos z + (\alpha - 1) \sin z = 0,$$

worin α eine positive Constante ist, hat bekanntlich nur reelle Wurzeln und zu

jeder positiven Wurzel gehört eine negative von gleichem Zahlenwerth. Bezeichnen wir daher die negativen Wurzeln ihrem absoluten Werthe nach geordnet durch $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots$, so ist

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n$$

und die Funktion w hat wiederum in den beiden Punkten λ_n und λ_{-n} das nämliche Residuum.

$$R(\lambda_n) = R(\lambda_{-n}) = -e^{-\left(\lambda_n \frac{a}{l}\right)^2 t} \frac{\sin\left(\lambda_n \frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(\lambda_n \frac{\varrho}{l}\right)}{1 - \frac{\sin \lambda_n \cos \lambda_n}{\lambda_n}}.$$

Die n^{te} positive Wurzel der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ hat die Ausdrucksform:

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi \pm \delta_n, \qquad 0 < \delta_n < \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha \gtrless 1.$$

Demnach sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha \gtrless 1$ ist.

Zunächst nehmen wir an $\alpha > 1$, also

$$\lambda_m = m\pi - \frac{\pi}{2} + \delta_m, \qquad 0 < \delta_m < \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_{m+1} = m\pi + \frac{\pi}{2} + \delta_{m+1}, \qquad 0 < \delta_{m+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$p = m\pi + \frac{\pi}{4},$$

so ist sicher

$$\lambda_m < p < \lambda_{m+1}.$$

Ferner bezeichne q eine von Null verschiedene positive Zahl.

Sodann sei das Rechteck mit den Eckpunkten

$$-p - iq,\ p - iq,\ p + iq,\ -p + iq$$

in der z-ebene vorgelegt, und die innere Fläche dieses Rechtecks möge E heissen.

Wir haben alsdann nach dem Residuensatze von Cauchy

$$\sum_{n=1}^{m} \left[R(n\pi) + R(-n\pi)\right] + \sum_{n=1}^{m} \left[R(\lambda_n) + R(\lambda_{-n})\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{(E)} w\, dz,$$

oder

$$\sum_{n=1}^{m} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(E)} w\, dz,$$

wo die Integration rechts über die vollständige Begrenzung von E in positiver Richtung zu erstrecken ist.

Im zweiten Falle $\alpha < 1$, haben wir

$$\lambda_m = m\pi - \frac{\pi}{2} - \delta_m, \qquad 0 < \delta_m < \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_{m+1} = m\pi + \frac{\pi}{2} - \delta_{m+1}, \qquad 0 < \delta_{m+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Also ist sicher

$$\lambda_m < m\pi - \frac{\pi}{4} < \lambda_{m+1}.$$

Setzen wir nun (wiederum)

$$p = m\pi - \frac{\pi}{4},$$

so ist nichts geändert wie im vorangehenden Falle, und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{m-1} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(E)} w\, dz,$$

wobei nur noch zu beachten ist, dass die erste Summation links nicht etwa wie im vorigen Falle von 1 bis m, sondern von 1 bis m — 1 zu erstrecken ist.

Fassen wir nun die beiden Fälle zusammen, indem wir setzen

$$p = m\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad \alpha \gtrless 1,$$

ferner bedeute ν m oder $m - 1$, je nachdem $\alpha \gtrless 1$ ist, so haben wir

$$\sum_{n=1}^{\nu} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(E)} w\, dz,$$

wobei es wiederholt bemerkt werden mag, dass die Integration rechts über die vollständige Begrenzung der rechteckigen Fläche E mit den Eckpunkten

$$-p - iq,\ p - iq,\ p + iq,\ -p + iq$$

in positiver Richtung zu erstrecken ist.

Der Umfang dieser Fläche ist aber zum Ursprunge symmetrisch; zu jedem Elemente dieses Umfangs gehört also ein zweites, welches zu ihm symmetrisch ist, also auch in symmetrischer Richtung durchlaufen wird. Die Werthe von z zu diesen Elementen sind also entgegengesetzt gleich, ebenso die Zunahmen, welche z beim Durchgange durch dieselben erlangt. Da aber der Integrand

$$w(z) = e^{-\left(z\frac{a}{l}\right)^2 t} \cdot \frac{z \cdot \sin\left(z\frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(z\frac{\varrho}{l}\right)}{\sin z \left[z \cos z + (\alpha - 1) \sin z\right]}$$

eine ungerade Funktion von z ist, so liefern diese Elemente dem Integrale $\int_{(E)} w\, dz$ den gleichen Betrag. Daher ist das Integral $\int_{(E)} w\, dz$, unter Beibehaltung der Integrationsrichtung, gleich dem Doppelten des Integrals $\int w\, dz$, erstreckt über eine der

zwei Hälften, in welchen die Begrenzung von E durch irgend eine durch den Ursprung hindurchgehende Gerade getheilt wird.

Wir integriren von $p - iq$ über die Ecke $p + iq$ bis $-p + iq$ und erhalten

$$\int_{(E)} w\, dz = 2\left[i\int_{-q}^{q} w\,(p+iy)\,dy + \int_{p}^{-p} w\,(x+iq)\,dx\right].$$

Von dem zweiten Integrale rechts kehren wir die Integrationsrichtung um und setzen

$$Q = \int_{-q}^{q} w\,(p+iy)\,dy,\quad P = \int_{-p}^{p} w\,(x+iq)\,dx,$$

also

$$\int_{(E)} w\,dz = 2\left[iQ - P\right],$$

und wir haben

$$\sum_{n=1}^{\nu} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{m} R(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i}\left[iQ - P\right].$$

Man wolle berücksichtigen, dass in dieser Gleichung die linke Seite von q unabhängig ist. In andern Worten, die rechte Seite hängt wohl in ihrem Ausdrucke von q ab, hat aber einen davon unabhängigen Werth — ein Umstand, welcher im Folgenden die Hauptrolle spielt.

Wir setzen nämlich, was demnach freisteht,

$$q = \frac{1}{\sqrt{t}},\ \text{d. i. } q^2\, t = 1,$$

wofern t und $\sqrt{t}$ positiv und von Null verschieden sind. Für die Rechnung ist es zweckmässig, q einstweilen beizubehalten und den soeben angegebenen Werth von q erst später einzuführen.

Dies festgestellt, lassen wir m die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufend über jeden Betrag hinaus wachsen, so haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} R(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{Lim}_{m=\infty}\left[iQ - P\right],$$

oder, wenn eines der beiden Integrale Q, P, also auch das andere gegen eine feste Grenze convergirt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} R(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i}\left[i\operatorname*{Lim}_{m=\infty} Q - \operatorname*{Lim}_{m=\infty} P\right].$$

Unter der nämlichen Voraussetzung haben wir also für

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{L}(\varrho \mid r \mid t) - \mathfrak{M}(\varrho \mid r \mid t)$$

die folgende Darstellung:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi i}\left[i\operatorname*{Lim}_{m=\infty} Q - \operatorname*{Lim}_{m=\infty} P\right].$$

§ 4.

Es wird sich nun darum handeln, die Convergenz der beiden Integrale Q und P bei wachsendem m wirklich nachzuweisen. Bevor wir dazu übergehen, ist noch zu bemerken, dass $\mathfrak{D}$, also auch Q und P als Funktionen von t, r und ϱ, für alle Fälle, wo t positiv und von Null verschieden, und

$$0 < r < l, \quad 0 \leqq \varrho \lessgtr l$$

ist, zu untersuchen sind.

Dies festgestellt, beschäftigen wir uns zuerst mit dem Integrale

$$Q = \int_{-q}^{q} w\,(p + iy)\,dy,$$

worin

$$w(z) = e^{-\left(z\,\frac{a}{l}\right)^2 t}\,\frac{z \cdot \sin\left(z\,\frac{r}{l}\right) \cdot \sin\left(z\,\frac{\varrho}{l}\right)}{\sin z \cdot \varphi(z)},$$

$$\varphi(z) = z\,\cos z + (\alpha - 1)\,\sin z,$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ und } p = m\pi \pm \frac{\pi}{4}\,(\alpha \gtrless 1)$$

ist.

Es wird nun gut sein, einige Hülfsformeln, deren Herleitung den Gang der Untersuchung unterbrechen würden, voraufzuschicken.

Bezeichnet man durch

$$Cy = \frac{1}{2}\,(e^{y} + e^{-y}) = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots.$$

$$Sy = \frac{1}{2}\,(e^{y} - e^{-y}) = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots.,$$

so ist

$$\sin(x + iy) = \sin x\ Cy + i \cos x\ Sy$$
$$\cos(x + iy) = \cos x\ Cy - i \sin x\ Sy.$$

Das gibt:

$$\text{Mod } \sin(x + iy) = \sqrt{Cy^2 - \cos x^2} = \sqrt{Sy^2 + \sin x^2},$$
$$Sy \leqq \text{Mod } \sin(x + iy) \lessgtr Cy,$$

und, insbesondere,

$$\text{Mod } \sin\frac{r}{l}(x + iy) \lessgtr C\left(\frac{r}{l}\,y\right)$$

$$\text{Mod } \sin\frac{\varrho}{l}(x + iy) \lessgtr C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right),$$

also

$$(1) \quad \text{Mod}\left|\,\sin\frac{r}{l}\,(x + iy) \cdot \sin\frac{\varrho}{l}\,(x + iy)\,\right| \lessgtr C\left(\frac{r}{l}\,y\right) \cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right).$$

Entwickelt man $\varphi(x+iy)$

$$\varphi(x+iy) = \begin{vmatrix} x\cos x\ Cy \\ +\ y\sin x\ Sy \\ +\ (\alpha-1)\sin x\ Cy \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} y\cos x\ Cy \\ -\ x\sin x\ Sy \\ +\ (\alpha-1)\cos x\ Sy \end{vmatrix}$$

und bildet alsdann den Modul, so erhält man durch einfache Reduction

$$(2.) \qquad \text{Mod}\ \varphi(x+iy) = \begin{vmatrix} [x\cos x + (\alpha-1)\sin x]^2 \\ +\ [y\ Cy + (\alpha-1)\ Sy]^2 \\ +\ x^2\ Sy^2 - y^2\sin x^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Für $x = p = m\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $(\alpha \gtrless 1)$ wird, unter Berücksichtigung dass

$$\sin\left(m\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{(-1)^m}{\sqrt{2}},\ \cos\left(m\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}},$$

$$\text{Mod}\ \varphi(p+iy) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\ [p \pm (\alpha-1)]^2 \\ +\ [y\ Cy + (\alpha-1)\ Sy]^2 \\ +\ p^2\ Sy^2 - \frac{1}{2}\ y^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}},$$

was auch wie folgt sich schreiben lässt:

$$\text{Mod}\ \varphi(p+iy) = \begin{vmatrix} \pm\ p\ (\alpha-1) \\ +\ \frac{1}{2}\ C(2\ y)\left[y^2 + 2\ y\ (\alpha-1)\ \frac{S(2\ y)}{C(2\ y)} + (\alpha-1)^2\right] \\ +\ \frac{1}{2}\ p^2\ C(2\ y) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun

$$\frac{S(2\ y)}{C(2\ y)} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$$

für jeden reellen Werth von y ein echter Bruch ist, so ist

$$y^2 + 2\ y\ (\alpha-1)\ \frac{S(2\ y)}{C(2\ y)} + (\alpha-1)^2$$

stets positiv; dasselbe gilt auch von $\pm\ p\ (\alpha-1)$ $(\alpha \gtrless 1)$, daher ist

$$\text{Mod}\ \varphi(p+iy) \geqq \frac{p}{\sqrt{2}}\sqrt{C(2\ y)}.$$

Setzt man in

$$\text{Mod}\ \sin(x+iy) = \sqrt{Cy^2 - \cos x^2}$$

$x = p = m\pi \pm \frac{\pi}{4}$, so ergibt sich

$$\text{Mod}\ \sin(p+iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{C(2\ y)},$$

woraus in Verbindung mit (1.) folgt, wenn zur Abkürzung

$$\mu = 2\,\frac{C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right)}{C\,(2\,y)} = \frac{C\left(\frac{r+\varrho}{l}\,y\right)+C\left(\frac{r-\varrho}{l}\,y\right)}{C\,(2\,y)}$$

gesetzt wird,

$$\text{Mod}\left|\frac{\sin\frac{r}{l}\,(p+iy)\,.\,\sin\frac{\varrho}{l}\,(p+iy)}{\sin\,(p+iy)\cdot\varphi\,(p+iy)}\right| \leqq \frac{\mu}{p}.$$

Aus $0 < r < l$, $0 \leqq \varrho \leqq l$ folgt

$$0 < \frac{r+\varrho}{l} < 2, \quad -1 < \frac{r-\varrho}{l} < 1.$$

Demnach ist offenbar für jeden reellen Werth von y

$$0 < \mu < 2.$$

Wir haben also schliesslich

$$\text{Mod}\;w\,(p+iy) \leqq 2\;e^{-p^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\,.\,e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\,.\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}.$$

Dies vorangeschickt, haben wir, unter Anwendung des bekannten Modulsatzes

$$\text{Mod}\;Q \leqq \int_{-q}^{q} \text{Mod}\;w\,(p+iy)\,dy$$

$$< e^{-p^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\int_{-q}^{q} e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy.$$

Da nun $e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}$ zwischen den Integrationsgrenzen unveränderliches Vorzeichen beibehält, so ist nach dem Mittelwerthsatz von Cauchy

$$\int_{-q}^{q} e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = \sqrt{1+\frac{y_0^2}{p^2}}\int_{-q}^{q} e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\,dy,\; 0 < y_0 < q.$$

In dem Integrale rechts ersetze man t durch $\frac{1}{q^2}$ (vergl. §. 3. zu Ende), alsdann führe man eine neue Integrationsvariabele $x = \frac{y}{q}\,\frac{a}{l}$ ein, so ergibt sich

$$\int_{-q}^{q} e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\,dy = \frac{ql}{a}\int_{-\frac{a}{l}}^{\frac{a}{l}} e^{x^2}\,dx.$$

Es ist aber

$$\int_{-c}^{c} e^{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,\sqrt{e^{\sigma c^2}-1},\; 1 < \sigma < 2,$$

also ist

$$\int_{-q}^{q} e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\, dy = \frac{ql}{a}\sqrt{\pi}\sqrt{e^{\sigma\left(\frac{a}{l}\right)^2} - 1},\quad 1 < \sigma < 2.$$

Somit haben wir für jeden Werth von m

$$\text{Mod } Q \lessgtr 2\,\frac{l}{a}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{e^{\sigma\left(\frac{a}{l}\right)^2} - 1}\cdot q\cdot e^{-p^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\cdot\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{p^2}},$$
$$0 < y_0 < q,\quad 1 < \sigma < 2.$$

§ 5.

Wir gehen zur Untersuchung des zweiten Integrals über:

$$P = \int_{-p}^{p} w\,(x + iq)\,dx,$$

worin

$$w\,(z) = e^{-z^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\,\frac{z\cdot\sin z\,\frac{r}{l}\cdot\sin z\,\frac{\varrho}{l}}{\sin z\cdot\varphi\,(z)},$$
$$\varphi\,(z) = z\cos z + (\alpha - 1)\sin z,$$
$$q = \frac{1}{\sqrt{t}}\text{ und } p = m\,\pi \pm \frac{\pi}{4}\quad (\alpha \gtrless 1)$$

ist.

Bei Gelegenheit der Untersuchung des andern Integrals haben wir gefunden [§ 4. (2.)]:

$$\text{Mod } \varphi\,(x + iy) = \left|\begin{array}{c}[x\cos x + (\alpha - 1)\sin x]^2 \\ + [y\,Cy + (\alpha - 1)\,Sy]^2 \\ + x^2\,Sy^2 - y^2\sin x^2\end{array}\right|^{\frac{1}{2}}$$

Nun ist

$$x^2\,Sy^2 - y^2\sin x^2 = x^2\left[\frac{1}{2}\,(C(2y) - 1) - y^2\,\frac{\sin x^2}{x^2}\right]$$
$$= x^2\left[\left(1 - \frac{\sin x^2}{x^2}\right)y^2 + \frac{2^3}{4!}\,y^4 + \frac{2^5}{6!}\,y^6 + \ldots.\right]$$

stets positiv. Im Ausdrucke für den Mod $\varphi\,(x + iy)$ stehen also rechts unter dem Wurzelzeichen lauter wesentlich positive Grössen. Hiervon unterdrücken wir das erste Glied und erhalten:

$$\text{Mod } \varphi\,(x + iy) \geqq \sqrt{x^2\left[Sy^2 - y^2\,\frac{\sin x^2}{x^2}\right] + [y\,Cy + (\alpha - 1)\,Sy]^2}.$$

Was noch unter dem Wurzelzeichen steht, können wir auch so schreiben:

$$x^2\left[Sy^2 - y^2\,\frac{\sin x^2}{x^2}\right] + [y\,Cy + (\alpha - 1)\,Sy]^2 = (x^2 + y^2)\,Sy^2\,\frac{1}{\Omega^2},$$

dann ist

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{x^2\left[1 - \frac{y^2}{Sy^2}\,\frac{\sin x^2}{x^2}\right] + y^2\left[\frac{Cy}{Sy} + \frac{\alpha - 1}{y}\right]^2}{x^2 + y^2},$$

ein Mittelwerth zwischen den Grenzen

$$1 - \frac{y^2}{Sy^2}\,\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{Sy^2}\left[\left(1 - \frac{\sin x^2}{x^2}\right)y^2 + \frac{2^3}{4!}\,y^4 + \frac{2^5}{6!}\,y^6 + \ldots.\right]$$

und

$$\left[\frac{Cy}{Sy} + \frac{\alpha - 1}{y}\right]^2 + \frac{1}{Sy^2}\left[\alpha + \frac{\alpha + 2}{3!}\,y^2 + \frac{\alpha + 4}{5!}\,y^4 + \ldots.....\right],$$

also selbst eine Zahl zwischen diesen Grenzen. Beide Grenzen sind positiv und, wie aus den Entwickelungen rechts ersichtlich ist, so lange y nicht gleich Null wird, endlich; wächst der absolute Werth von y, so nähern sich beide Grenzen, und mit ihnen die positive Zahl Ω, sehr rasch der Einheit.

Unter Festhaltung dieser Bedeutung von Ω haben wir

$$\text{Mod sin}\,(x + iy) \geqq \sqrt{x^2 + y^2}\cdot Sy\cdot\frac{1}{\Omega}.$$

Ferner ist

$$\text{Mod sin}\,(x + iy) \geqq Sy$$

und [§ 4. (1.)]

$$\text{Mod}\left|\sin\frac{r}{l}\,(x + iy)\cdot\sin\frac{\varrho}{l}\,(x + iy)\right| \leqq C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right);$$

also folgt

$$\text{Mod}\left|\frac{(x + iy)\cdot\sin\frac{r}{l}\,(x + iy)\cdot\sin\frac{\varrho}{l}\,(x + iy)}{\sin\,(x + iy)\cdot\varphi\,(x + iy)}\right| \leqq \Omega\,\frac{C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right)}{Sy^2}$$

und schliesslich

$$\text{Mod}\,w\,(x + iy) \leqq \Omega\,\frac{C\left(\frac{r}{l}\,y\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,y\right)}{Sy^2}\cdot e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\cdot e^{y^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}.$$

Hierin setze man $y = q$ ein und bemerke dabei $q^2\,t = 1$ (vergl. § 3 zu Ende), so erhält man

$$\text{Mod}\,w\,(x + iq) \leqq e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2}\cdot\Omega\cdot\frac{C\left(\frac{r}{l}\,q\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}\,q\right)}{Sq^2}\,e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}.$$

Wir wenden den Modulsatz an und erhalten

$$\text{Mod } P \gtrless \int_{-p}^{p} \text{Mod } w(x+iq)\, dx$$

$$\gtrless e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2} \cdot \Omega \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}q\right) \cdot C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2} \int_{-p}^{p} e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\, dx,$$

wo also Ω für $y = q$ zu bilden ist.
In dem Integrale

$$\int_{-p}^{p} e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t} \cdot dx$$

ersetzen wir t durch $\frac{1}{q^2}$ und führen die neue Veränderliche x statt $\frac{a}{l}\frac{x}{q}$ ein, so ergibt sich

$$\int_{-p}^{p} e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\, dx = q \cdot \frac{l}{a} \cdot \int_{-\frac{a}{l}\frac{p}{q}}^{\frac{a}{l}\frac{p}{q}} e^{-x^2}\, dx.$$

Es ist aber

$$\int_{-c}^{c} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{-\sigma c^2}}, \quad 1 < \sigma < 2,$$

also

$$\int_{-p}^{p} e^{-x^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t} < q \cdot \frac{l}{a} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Somit haben wir für jeden Werth von m

$$\text{Mod } P \gtrless \frac{l}{a} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2} \cdot q. \quad \Omega \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}q\right) \cdot C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2}$$

§ 6.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden Integrale

$$Q = \int_{-q}^{q} w(p+iy)\, dy, \quad P = \int_{-p}^{p} w(x+iq)\, dx,$$

wo

$$q = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ und } p = m\pi \pm \frac{\pi}{4} \; (\alpha \gtrless 1)$$

ist, bei wachsendem m einzeln convergiren, haben wir gefunden; (§. 3).

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi i} \left| i \operatorname*{Lim}_{m=\infty} Q - \operatorname*{Lim}_{m=\infty} P \right|$$

Durch die Untersuchung der beiden vorangehenden Artikel sind folgende Resultate gewonnen:

$$\text{Mod } Q < 2\frac{l}{a}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{e^{\sigma\left(\frac{a}{l}\right)^2}-1}\cdot q\cdot e^{-p^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\cdot\sqrt{1+\frac{y_0^2}{p^2}},$$

$$1 < y_0 < q,\ 1 < \sigma < 2;$$

$$\text{Mod } P \leqq \frac{l}{a}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2}\cdot q\cdot\Omega\cdot\frac{C\left(\frac{r}{l}q\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2}.$$

Lässt man hierin m über alle Grenze hinaus wachsen, so wächst auch, wegen $p = m\pi \pm \frac{\pi}{4}$:

$$p^2 t = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

über alle Grenzen, wofern t einen festen positiven Werth beibehält; es ergibt sich

$$\lim_{m=\infty} e^{-p^2\left(\frac{a}{l}\right)^2 t}\cdot q\cdot\sqrt{1+\frac{y_0^2}{p^2}} = 0.$$

Dabei ist also ausdrücklich gefordert, dass t positiv und ohne Unbestimmtheit von Null verschieden ist. Es folgt für jeden dieser Bedingung genügenden Werth von t

$$\lim_{m=\infty} Q = 0.$$

Also folgt, dass mit wachsendem m zu jedem ohne Unbestimmtheit gegebenen positiven Werth von t auch P convergirt, und wir haben

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{L} - \mathfrak{M} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} w\,(x+iq)\,dx,$$

wo q nur an die Bedingung gebunden ist, positiv und weder unendlich klein noch unendlich gross zu werden, also auch $q = \frac{1}{\sqrt{t}}$ gesetzt werden darf, wofern t den genannten Bedingungen unterworfen ist.

§ 7.

Nachdem wir so die Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch ein bestimmtes Integral gewonnen haben, untersuchen wir weiter, was hieraus bei abnehmendem $t = \frac{1}{q^2}$ wird. Wir haben für jedes m

$$\text{Mod } P \leqq \frac{l}{a}\cdot\sqrt{\pi}\cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2}\cdot q\cdot\Omega\cdot\frac{C\left(\frac{r}{l}q\right)\cdot C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2};$$

das gibt, so lange t positiv und ohne Unbestimmtheit gegeben ist

$$\text{Mod } \mathfrak{P} \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{l}{a} \cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2} \cdot q \cdot \Omega \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}q\right) \cdot C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2}.$$

Sei

$$E = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{l}{a} \cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2}$$

$$H = \Omega \cdot q \cdot \frac{C\left(\frac{r}{l}q\right) C\left(\frac{\varrho}{l}q\right)}{Sq^2},$$

also

$$\text{Mod } \mathfrak{P} \leqq E \cdot H,$$

so lange t positiv und ohne Unbestimmtheit gegeben ist.

Wir untersuchen nun den Gang der Zahl H für den Fall, dass $q = \frac{1}{\sqrt{t}}$ vergrössert wird, und setzen zu dem Ende H in die Form

$$H = \Omega \cdot \frac{\left(1 + e^{-2\frac{r}{l}q}\right)\left(1 + e^{-2\frac{\varrho}{l}q}\right)}{\left(1 - e^{-2q}\right)^2} \cdot q \cdot e^{-q\left(2 - \frac{r+\varrho}{l}\right)}.$$

Von Ω wissen wir, dass es, wenn q vergrössert wird, rasch gegen die Einheit convergirt. Das nämliche gilt für den Faktor

$$\frac{\left(1 + e^{-2\frac{r}{l}q}\right)\left(1 + e^{-2\frac{\varrho}{l}q}\right)}{\left(1 - e^{-2q}\right)^2};$$

setzen wir daher

$$\Omega \frac{\left(1 + e^{-2\frac{r}{l}q}\right)\left(1 + e^{-2\frac{\varrho}{l}q}\right)}{\left(1 - e^{-2q}\right)^2} = 1 + \omega,$$

so ist für erhebliche Werthe von q die Zahl ω nur sehr wenig von Null verschieden. Es kommt also nur noch auf den Faktor

$$\gamma = q\, e^{-q\left(2 - \frac{r+\varrho}{l}\right)}$$

an. Es ist aber

$$0 < \frac{r+\varrho}{l} < 2;$$

setzen wir daher

$$2 - \frac{r+\varrho}{l} = k,$$

so ist dies eine von Null verschiedene positive Zahl und nicht grösser als 2, und

$$\gamma = q\, e^{-kq}.$$

Nun sei

$$S = q^2\, e^{-kq} = q\,\gamma.$$

Dann wird

$$\frac{dS}{dq} = S\left(\frac{2}{q} - k\right) = k\gamma\left(\frac{2}{k} - q\right);$$

dies ist positiv von $q = 0$ bis $q = \frac{2}{k}$, darüber hinaus ist es negativ, für $q = \frac{2}{k}$ hat also S ein Maximum und sinkt, wenn q über diese Grenze hinaus wächst, ohne Ende. Ist $q > \frac{2}{k}$, so ist also

$$S < \left(\frac{2}{k}\right)^2 e^{-2}$$

d. h. für $q > \frac{2}{k}$ ist stets

$$\gamma < \frac{1}{q}\left(\frac{2}{ke}\right)^2$$

und nun haben wir, für jeden Werth von $q = \frac{1}{\sqrt{t}}$, welcher $> \frac{2}{k}$ ist,

$$\text{Mod } \mathfrak{D} \leqq \mathrm{E}\,\frac{(1+\omega)\left(\frac{2}{ke}\right)^2}{q}.$$

Ist nun ε eine von Null verschiedene, positive und ohne Unbestimmtheit gegebene Zahl, übrigens beliebig klein, und

$$q > \frac{2\left(\frac{2}{ke}\right)^2}{\varepsilon},$$

so wird

$$\frac{(1+\omega)\left(\frac{2}{ke}\right)^2}{q} < \frac{(1+\omega)}{2}\,\varepsilon < \varepsilon,$$

also für jeden festen, über der Grenze $\frac{8}{e^2 k^2 \varepsilon}$ liegenden Werth von q:

$$\text{Mod } \mathfrak{D} < \mathrm{E} \cdot \varepsilon.$$

Dies setzt voraus, dass zugleich

$$q > \frac{2}{k} \text{ und } q > \frac{2\left(\frac{2}{ke}\right)^2}{\varepsilon}$$

ist: ist $\varepsilon < \frac{4}{ke^2}$, so zieht die zweite Ungleichheit die erste nach sich und kann, wenn man will, durch die verstärkte Ungleichheit

$$q > \frac{2}{k^2\,\varepsilon}$$

ersetzt werden.

Führen wir statt q seinen Werth $\frac{1}{\sqrt{t}}$ wieder ein, so folgt

$$\text{Mod } \mathfrak{D} < E \cdot \varepsilon$$

für jedes positive t, welches kleiner ist als die Zahl

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{ek}{2}\right)^4 = \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{e}{2}\left(2 - \frac{r+\rho}{l}\right)\right]^4,$$

vorausgesetzt, dass $\varepsilon < \frac{4}{ke^2}$ oder

$$\varepsilon < \left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{1}{2 - \frac{r+\rho}{l}}$$

ist.

Geht ρ von 0 bis l, so erlangt die obere Grenze für ε ihren niedrigsten Werth für $\rho = 0$. Noch kleiner als diese ist $\left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{1}{2}$ und dies ist von r und ρ unabhängig.

Obiges Resultat gilt also sicher, wenn

$$\varepsilon < \frac{2}{e^2}$$

ist, und gilt für jedes positive t, welches unterhalb

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^4\left(2 - \frac{r+\rho}{l}\right)^4$$

liegt. Geht ρ von 0 bis l, so erlangt dies seinen niedrigsten Werth für $\rho = l$; es folgt der Satz: werden ε und t ohne Unbestimmtheit positiv und so angenommen, dass

$$\varepsilon < \frac{2}{e^2} \text{ und } t < \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^4\left(1 - \frac{r}{l}\right)^4$$

wird, so sinkt der absolute Werth von $\mathfrak{D}$ unter die Grenze $E \cdot \varepsilon$, wo

$$E = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{l}{a} \cdot e^{\left(\frac{a}{l}\right)^2}$$

ist, und dies gilt von $\rho = 0$ bis $\rho = l$.

§ 8.

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes folgt weiter, wenn

$$A$$

den grössten absoluten Werth der Funktion $f(\varrho)$ von $\varrho = 0$ bis $\varrho = l$ bedeutet, dass

$$r(u' - u) = \frac{2}{l}\int_0^l \varrho\, f(\varrho)\, \mathfrak{D}\, d\varrho$$

numerisch kleiner ist wie

$$\frac{2}{l}\int_0^l \varrho\, A\, E\, \varepsilon\, d\varrho = \varepsilon \cdot A \cdot E \cdot l:$$

also sinkt $u' - u$ durch Verkleinerung von t unter jede Grenze. Dabei convergirt u' für sich allein, also auch u, mithin convergirt u gegen die nämliche Grenze wie u', das aber ist $f(r)$.

Dies setzt voraus, dass im Ausdrucke $r(u' - u)$ der erste Faktor von Null verschieden ist; die obere Grenze für t setzt voraus, das $1 - \frac{r}{l}$ nicht gleich Null ist; der Satz, dass unter den DIRICHLET'schen Voraussetzungen über den Verlauf der Funktion $f(r)$ für ein positiv abnehmendes t

$$\text{Lim } u = f(r)$$

ist, beschränkt sich also auf die Ungleichheit

$$0 < r < l$$

mit Ausschluss der Grenzen.

Lebenslauf.

Ich, Rikitaro Fudzisawa, bin geboren am 9. September 1861 zu Niigata in Japan, buddhistischer Confession. Nachdem ich in der Elementarschule meines Heimatortes den ersten Unterricht erhalten hatte, kam ich nach Tokio, wo ich 1874 in das englische Gymnasium (zu Tokio) aufgenommen wurde; 1879 verliess ich diese Anstalt mit dem Zeugniss zur Berechtigung des Besuches der Kaiserlichen Universität zu Tokio.

Im Herbst 1879 trat ich in die Kaiserliche Universität zu Tokio ein, wo ich mich dem Studium der Physik, Mathematik und Astronomie widmete und nach drei Jahren das «Rigakuschi-Examen» bestand.

Im Sommer 1883 kam ich nach London und Ende December desselben Jahrs nach Berlin, wo ich mich an der dortigen Universität immatrikuliren liess, und studirte daselbst bis Ende des Sommer-Semesters 1884.

Im September 1884 kam ich nach Strassburg und setzte meine mathematischen Studien fort.

Während meiner Studienzeit in Deutschland besuchte ich die Vorlesungen folgender Herren:

Aron, Christoffel, Helmholtz, Kirchhoff, Knoblauch, Kronecker, Kundt, Netto, Reye, Weierstrass.

Allen den genannten Herrn, insbesondere den Herrn Professoren Christoffel und Reye, spreche ich an dieser Stelle für das rege Interesse an dem Fortgange meiner Studien den herzlichsten Dank aus.